

# ESTIMACIÓN DEL CRECIMIENTO DIAMÉTRICO, DE *ANACARDIUM EXCELSUM* (KUNTH) SKEELS, POR MEDIO DE MODELOS NO LINEALES, EN BOSQUES NATURALES DEL DEPARTAMENTO DEL TOLIMA

Luis Alfredo Lozano B.<sup>1</sup>, Nathaly Franco O.<sup>2</sup>, Jeimy Lorena Bonilla V.<sup>3</sup>

## Resumen

Evaluar el crecimiento de los árboles en los bosques, es importante, tanto económica, como ecológicamente, por su utilidad para estimar y predecir el rendimiento forestal (VANCLAY, 1994). Es por esto, que a continuación, se presentan los resultados del estudio de crecimiento, realizado durante cuatro mediciones diamétricas sucesivas, entre los años 2008-2010, a 27 individuos de Caracolí (*Anacardium excelsum* (Kunth) Skeels), en cuatro parcelas permanentes de investigación ubicadas en los bosques naturales de los municipios de: Mariquita, Venadillo, Alvarado e Ibagué, del departamento del Tolima. Se calculó el incremento corriente anual (ICA), promedio del diámetro de la especie, así como también, el tiempo que la especie tardaría en alcanzar el diámetro asintótico, estimado mediante los modelos no lineales de Von Bertalanffy, logístico y de Gompertz y, se compararon, los perfiles de crecimiento diamétrico, por medio del estadístico T<sup>2</sup> de Hotelling. La especie presentó, un ICA promedio en el diámetro de 1,40 cm/año. La estimación del crecimiento diamétrico, por medio de los modelos de Von Bertalanffy y de Gompertz, mostró que, un individuo con diámetro de 10 cm, tarda 180 años en llegar a 13 cm, con un ICA de 0,045 y 0,046 cm/año, respectivamente, mientras que, con el logístico, la especie tardaría 40 años menos que los anteriores, con un ICA de 0,065 cm/año.

**Palabras clave:** bosque tropical, Caracolí, epidometría forestal, modelos de crecimiento, rendimiento forestal.

## ESTIMATE OF DIAMETRIC GROWTH OF *ANACARDIUM EXCELSUM* (KUNTH) SKEELS THROUGH NON-LINEAR MODELS IN NATURAL FOREST FROM THE DEPARTMENT OF TOLIMA

### Abstract

It is important to assess trees growth in the forest both economically and environmentally, because of their usefulness to estimate and predict forest efficiency (VANCLAY, 1994). This paper presents the results of growth study carried out during four diametric measurements between 2008 and 2010, to 27 Caracolí (*Anacardium excelsum* Kunth-Skeels) individuals in four permanent research plots located in the natural forest in the municipalities of Mariquita, Venadillo, Alvarado and Ibagué, Department of Tolima. The current annual increment (CAI), the species average diameter as well as the time the species took to reach the asymptotic diameter were calculated using Von Bertalanffy's non-linear models, the logistic model and Gompertz' model, and the diametric growth profiles were compared using Hotelling's

\* FR: 1-V-2011. FA: 10-V-2012.

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería Forestal. Universidad del Tolima. Email: llozano@ut.edu.co.

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería Forestal. Universidad del Tolima. Email: nfrancoo@ut.edu.co.

<sup>3</sup> Facultad de Ingeniería Forestal. Universidad del Tolima. Email: forest.lorena@gmail.com.

statistic  $T^2$ . The species presented an average CAI in the 1,40 cm/year diameter. In analyzing the diametric growth of the species using Von Bertalanffy and Gompertz's models showed that a 10 cm diameter individual takes 180 years in reaching 113 cm, with a CAI rate from 0,045 to 0,046 cm/year respectively while with the Logistic model the species would take 40 years less than the ones aforementioned with a 0,065 cm/year CAI.

**Key words:** tropical forest, Caracolí, forest epidemetry, growth models, forest performance.

## INTRODUCCIÓN

El crecimiento de los árboles, es el resultado de la modificación de variables como: diámetro, altura, área basal y volumen, las cuales, biológicamente, cambian debido a la actividad de los meristemos primarios, que se encargan del crecimiento longitudinal, como la altura y los meristemos secundarios, que dan lugar al crecimiento en diámetro (DIÉGUEZ *et al.*, 2003; GARCÍA, 2009). El crecimiento de un árbol, puede presentar variaciones en sus dimensiones, debido a factores genéticos de las especies, por influencia de los factores climáticos, como: temperatura, precipitación, viento, iluminación; por las características físicas, químicas y biológicas de los suelos; por la topografía del sitio; por las diferentes enfermedades o plagas que se presenten; o por la propia competencia con otros árboles y otros tipos de vegetación (IMAÑA & ENCINAS, 2008).

Al realizar la evaluación del crecimiento arbóreo, el diámetro es una de las dimensiones que, comparada con otras, su medición es más fácil y más precisa (BROWN, 1997; HERNÁNDEZ & CASTELLANOS, 2006). Es por esto, que los estudios del crecimiento diamétrico de los árboles tropicales, se han basado en estimaciones a partir de mediciones repetidas del diámetro, realizadas en parcelas permanentes de diferente tamaño (FINEGAN & CAMACHO, 1999).

Estimar el crecimiento diamétrico de los árboles por medio de modelos determinísticos, ha resultado ser muy importante en campos de la ciencia, como: la biología, la teoría sucesional y la silvicultura, debido a que los modelos, permiten explorar a detalle, la dinámica del crecimiento de un bosque, mejorando de esta forma, el desarrollo de la epidemetry de las especies (GARCÍA, 2009).

En los últimos años, se han desarrollado modelos determinísticos aplicados con éxito en el ajuste del crecimiento, como el de Von Bertalanffy-Richard, el logístico o el de Gompertz (GUTIÉRREZ, 2005). El modelo de Von Bertalanffy-Richards, se emplea para simular aproximadamente, el crecimiento del bosque, comenzando en su etapa transitoria y logrando estimar su turno, el tiempo que los árboles permanecen en cada categoría diamétrica, permite: el estudio de la población, el desarrollo de la productividad de los ecosistemas y estimar los ciclos de corta y los volúmenes explotables permitidos (LÓPEZ *et al.*, 1993; RIAÑO, 2000). WINSOR (1932), propuso usar el modelo de Gompertz, para la descripción de fenómenos biológicos y económicos asociados al crecimiento, la curva de este modelo, muestra crecimientos tempranos rápidos, pero con un largo periodo de crecimiento lineal alrededor del punto de inflexión. Con el modelo logístico, las especies se adaptan de forma instantánea al crecimiento y se aproximan, a la capacidad de carga de forma lenta, se puede aplicar a pocas poblaciones reales, pero es un punto de partida útil, para considerar la forma en que las poblaciones crecen y determinar así, qué factores afectan dicho crecimiento (CAMPBELL & REECE, 2007).

La estimación del crecimiento diamétrico, por medio de modelos no lineales, ha sido estudiado por diferentes autores, como por ejemplo: DEL VALLE (1997), en los bosques de guadalupe en el Pacífico sur colombiano, pertenecientes a la zona de vida bosque húmedo tropical (bh-T), en especies forestales, como *Otoba gracilipes* (A.C. Sm.) Gentry, *Pithecellobium latifolium* (L.) Benth y *Swartzia amplifolia* var. rígida RSCowan. De igual forma LEÓN-PELÁEZ & GIRALDO (2000), evaluaron en el departamento de Antioquia, en la zona de vida bosque muy húmedo montano bajo (bmh-MB) de Colombia, el crecimiento diamétrico de *Quercus humboldtii* Bonpl. Este trabajo, presenta los resultados de las mediciones realizadas a *Anacardium excelsum*, en el cual, se calcula la tasa de incremento diamétrico, por medio de modelos no lineales, se estima el tiempo que requiere la especie para lograr el diámetro asintótico y se comparan los perfiles del crecimiento diamétrico de la especie, por medio del estadístico T<sup>2</sup> de Hotelling.

## METODOLOGÍA

### Descripción del área de estudio

La información corresponde a cuatro mediciones, tomadas sobre cuatro parcelas permanentes, entre los años 2008 y 2010 (Tabla 1). Las parcelas, de 50 x 40 metros, están distribuidas en cuatro municipios del departamento del Tolima y fueron delimitadas durante el desarrollo del plan General de Ordenación Forestal para el Tolima (UNIVERSIDAD DEL TOLIMA-CORTOLIMA, 2007).

**Tabla 1.** Descripción y ubicación de las parcelas, donde se evaluó la especie *Anacardium excelsum*.

Municipio	No. árboles	Coordenadas Geográficas		Altitud m.s.n.m	Precipitación mm	zona de vida
		W	N			
Mariquita	13	74°54'26.623943	5°12'00.887527	700	2291	bh-T
Alvarado	6	74°58'53.016954	4°35'04.851221	519	1380	bs-T
Venadillo	4	74°49'16.299898	4°40'33.088657	274	1224	bs-T
Ibagué	4	75°13'24.273963	4°25'39.892550	1190	1926	bh-PM

bs-T: Bosque Seco Tropical. bh-T: Bosque húmedo. Tropical. bh-PM: Bosque húmedo Premontano.

### Análisis de datos

En las cuatro parcelas permanentes de investigación, se midieron 27 árboles de *A. excelsum*, mayores a 10 cm de diámetro, a la altura del pecho (DAP) (UNIVERSIDAD DEL TOLIMA-CORTOLIMA, 2011). Los datos se organizan de menor a mayor y se calcula el incremento corriente anual (ICA); el ICA, se tomó, teniendo en cuenta, la diferencia entre la última medición y la primera, dividido en el tiempo de diferencia entre las mediciones, en este caso, dos años y dos meses (MELO & VARGAS, 2003).

Los diámetros de la última medición, se clasificaron por clases diamétricas, se utilizó como límite inferior 10 cm y como superior 114,5 cm; el registro entre clase

y clase, fue de 9,5 cm, para un total de 11 clases diamétricas y se calculó, el ICA promedio, por cada clase diamétrica (MELO& VARGAS, 2003).

Se realizó un análisis de varianza para la variable “zona de vida” y determinar así, si el tipo de bosque en el cual crece la especie afecta el crecimiento.

### Evaluación del crecimiento

De acuerdo con los estudios de DEL VALLE (1997), LEÓN-PELÁEZ & GIRALDO (2000) y RAMÍREZ *et al.* (2009), la tasa de crecimiento diamétrico de la especie, se evaluó utilizando los incrementos por clases diamétricas para cada uno de los tres modelos escogidos, por ser los más estudiados para evaluar el crecimiento; por medio de la regresión no lineal, se hallaron los parámetros de cada ecuación. Al realizar los ajustes de los modelos por regresión no lineal, se obtuvo el cuadrado medio del error, el cual, estima la diferencia que hay, entre los valores reales y los valores ajustados o corregidos, con esto, se evalúa el comportamiento de los modelos. Posterior a ello, se analizan gráficamente los comportamientos de la especie con cada modelo. Con la integración de las ecuaciones de tasas de crecimiento, se obtienen las ecuaciones del crecimiento del diámetro en función del tiempo. Se utilizaron los parámetros de las ecuaciones de tasa de crecimiento diamétrico, para calcular los valores que determinan el crecimiento de la especie, con el paso del tiempo y se hallaron funciones, que se utilizan para comparar los modelos. Cada parámetro se determinó, tomando como asíntota, el diámetro mayor encontrado en las mediciones. El comportamiento de las ecuaciones de crecimiento, se refleja en una curva de crecimiento acumulado, donde el diámetro está en función de la edad.

### Modelos no lineales

Los modelos empleados para estimar el crecimiento diamétrico de las especies evaluadas, se pueden observar en la Tabla 2, los cuales, se escogieron por ser los más sencillos y más utilizados en los estudios de crecimiento animal, económico o de especies forestales.

**Tabla 2.** Ecuaciones de tasa de crecimiento y crecimiento para cada uno de los modelos.

MODELOS NO LINEALES	ECUACIÓN TASA DE CRECIMIENTO	ECUACIÓN DE CRECIMIENTO
<b>Von Bertalanffy</b>	$n(D^m - A^{(m-1)}D)$	$A(1 \pm be^{-kT})^{\frac{1}{1-m}}$
<b>Logístico</b>	$kD \left(1 - \frac{D}{A}\right)$	$\frac{A}{1 + be^{-kT}}$
<b>Gompertz</b>	$kD \ln \frac{A}{D}$	$Ae^{-be^{-kT}}$

El primer modelo que se empleó para simular el crecimiento del bosque, es el de Von Bertalanffy, este modelo, puede representarse todas las ecuaciones empíricas de crecimiento, si se tiene en cuenta lo siguiente: si  $m = 0$ , se comporta como una curva monomolecular o Mitscherlich. Si  $m = 2$ , se comporta como una curva logística o autocatalítica y si  $m = 1$ , se comporta como la curva de Gompertz (GONZÁLEZ, 1994). Con la interacción de los parámetros de las ecuaciones de Von Bertalanffy, se deducen funciones, que permiten un mejor entendimiento de las curvas de crecimiento y de sus tasas de crecimiento, como: la media ponderada de la tasa de crecimiento absoluto:  $A.k / (2m+2)$ ; tiempo requerido para que se efectúe la mayor parte del crecimiento:  $(2m+2)/k$ ; media ponderada de la tasa de crecimiento relativo:  $k / m$  (VÁSQUEZ, 1988; MELO & VARGAS, 2003).

El segundo modelo que se utilizó, es el logístico, el cual se basa en las “leyes de crecimiento de la población” y cumple una condición, en la que la tasa de crecimiento de la población, varía con el tiempo y es una alternativa al modelo de crecimiento exponencial, en el cual, la tasa de crecimiento es constante (QUINÓNEZ & LECOMPTE, 2007). Según ESPINA (1984), los puntos de inflexión y la tasa máxima de crecimiento del modelo logístico, se expresan con las siguientes funciones: Punto de inflexión en el diámetro:  $A/2$ ; Punto de inflexión en el tiempo:  $\ln b/k$ .

El último modelo empleado, es el de Gompertz, el cual presenta una curva de crecimiento de forma sigmoideal, con un punto que corresponde a la máxima tasa de crecimiento con la edad y una asíntota, además, genera asimetría alrededor del punto de inflexión, muestra crecimientos tempranos rápidos, pero unos valores más lentos, en la medida, en que se aproxima a la asíntota (CASAS *et al.*, 2010). El momento en que la curva de Gompertz, deja de acelerarse y empieza a retardarse, está definido por los puntos: Punto de inflexión en el tiempo  $t$ :  $\ln b/k$ ; Punto de inflexión en el diámetro  $D$ :  $A/e$  (BLASCO, s.f.).

### Análisis de perfiles

De acuerdo con DÍAZ-MONROY (2002), la comparación de perfiles, se basa en el análisis de varianza multivariado. Esta comparación se puede desarrollar en una o varias muestras y examina la construcción, indagación o topología del perfil, por tanto, establece, si existen diferencias entre los perfiles, pero no determina cual es el mejor. En este trabajo se consideran perfiles, a las gráficas de tendencias obtenidas de los modelos de crecimiento.

Para realizar el análisis de perfiles, se calculó el estadístico de  $T^2$  de Hotelling (DÍAZ-MONROY, 2002), el cual parte de una matriz de covarianza, del vector de medias y una matriz de contraste. El estadístico está expresado de la siguiente manera:

$$T^2 = n \cdot (C \cdot \bar{e})' \cdot (C \cdot S \cdot C')^{-1} \cdot (C \cdot \bar{e})$$

Donde:  $\bar{e}$  = Vector de medias por tratamiento;  $n$  = número de observaciones;  $C$  = Matriz de contraste;  $C'$  = Inversa de la matriz de contraste;  $S$  = Matriz covariante de los datos.

$T^2$ , se convierte en una  $F$ , para poder compararla con el valor de las tablas de la estadística de Fisher,  $F(p-1, n-p+1)$ , por medio de la siguiente expresión:

$$T^2 = [(n-p+1)/(n-1) \cdot (p-1)] \cdot T^2$$

Se compara con las tablas de la estadística de Fisher y se rechaza la hipótesis nula, si:  $T^2 > F_{(p-1, n-p+1)}$

## RESULTADOS

### Incremento del diámetro de la especie

En la Tabla 3, se presenta la organización de los diámetros de los 27 individuos de *A. excelsum*, por periodos de medición. Además, el incremento corriente anual y el incremento periódico. El incremento uno, es la diferencia entre el periodo uno y el dos; este presenta 12 árboles, que crecieron más de un cm, en seis meses; el árbol que mayor incremento diamétrico tuvo, fue el marcado como número 16 con 2,7 cm; en cambio el árbol número cuatro, no mostró crecimiento. En promedio, en estos primeros seis meses de medición, la especie incrementó 0,99 cm. El segundo incremento, es la diferencia entre el periodo dos y el tres; este mostró que, tres de los 27 árboles, no crecieron. Aquí, el árbol número 16, presentó el mayor crecimiento con 1,5 cm y el promedio entre estos periodos, fue de 0,59 cm. La diferencia entre el diámetro del periodo tres y el periodo cuatro, es el incremento tres, presentado por 14 individuos que crecieron más de un cm de diámetro. El árbol número 25, fue el de mayor incremento, con 2,8 cm en un año; mientras que el árbol número tres creció 0,10 cm; en promedio, el incremento diamétrico para este periodo, fue de 1,21 cm.

**Tabla 3.** Incremento periódico e incremento corriente anual, para la especie *Anacardium excelsum*, en bosques del Tolima.

No. de árbol	PERIODOS DE MEDICIÓN DEL DAP (cm)				INCREMENTO PERIÓDICO (cm)			ICA (cm/año)
	1	2	3	4	1	2	3	
	1	11,33	12,30	13,15	13,80	0,97	0,85	
2	12,89	13,30	13,60	13,90	0,41	0,30	0,30	0,47
3	15,70	15,70	15,80	15,90	0,00	0,10	0,10	0,09
4	16,70	16,80	16,80	17,00	0,10	0,00	0,20	0,14
5	23,58	25,50	26,50	28,60	1,92	1,00	2,10	2,32
6	28,20	28,80	28,90	29,00	0,60	0,10	0,10	0,37
7	28,00	29,85	30,80	32,70	1,85	0,95	1,90	2,17
8	35,20	36,50	37,00	38,10	1,30	0,50	1,10	1,34
9	40,80	43,00	43,40	45,35	2,20	0,40	1,95	2,10
10	47,90	48,50	48,85	49,60	0,60	0,35	0,75	0,78
11	47,40	48,00	48,80	50,20	0,60	0,80	1,40	1,29
12	48,40	49,70	50,70	53,10	1,30	1,00	2,40	2,17

No. de árbol	PERIODOS DE MEDICIÓN DEL DAP (cm)				INCREMENTO PERIÓDICO (cm)			ICA (cm/año)
	1	2	3	4	1	2	3	
13	52,10	52,90	53,30	53,70	0,80	0,40	0,40	0,74
14	55,79	56,40	56,40	56,50	0,61	0,00	0,10	0,33
15	55,80	57,40	58,10	60,00	1,60	0,70	1,90	1,94
16	59,20	61,90	63,40	65,10	2,70	1,50	1,70	2,72
17	64,80	66,10	66,65	68,50	1,30	0,55	1,85	1,71
18	68,70	69,20	69,45	71,60	0,50	0,25	2,15	1,34
19	71,30	72,60	73,30	74,70	1,30	0,70	1,40	1,57
20	75,70	75,85	76,13	76,60	0,15	0,28	0,47	0,42
21	76,50	77,80	78,40	79,10	1,30	0,60	0,70	1,20
22	74,80	76,90	77,90	80,50	2,10	1,00	2,60	2,63
23	81,10	82,20	82,80	84,10	1,10	0,60	1,30	1,38
24	90,50	90,90	91,57	92,40	0,40	0,67	0,83	0,88
25	90,00	90,10	92,00	94,80	0,10	1,90	2,80	2,22
26	97,78	98,70	99,10	99,90	0,92	0,40	0,80	0,98
27	112,30	112,40	112,40	113,00	0,10	0,00	0,60	0,32
	<b>PROMEDIO</b>							<b>1,29</b>

1: Periodo de medición entre octubre y diciembre del 2008. 2: Periodo de medición entre mayo y julio del 2009. 3: Periodo de medición entre noviembre y diciembre del 2009. 4: Periodo de medición en diciembre 2010.

El ICA, muestra que el árbol con mayor crecimiento, fue el número 16, debido a que, durante los dos años de medición, su diámetro se incrementó en 5,9 cm, con un ICA de 2,72 cm/año. En contrario, el árbol número tres, presentó, el menor crecimiento, con 0,2 cm, e ICA de 0,09 cm/año. El ICA promedio para los 27 árboles, fue de 1,29 cm/año.

De los 27 árboles, 10 de ellos se encontraron en el bs-T, con un ICA promedio de 1,35 cm/año. En el bh-T se encontraron 13, con un ICA promedio de 1,26 cm/año. En el bh-PM se encontraron 4, los que presentaron un ICA promedio de 1,21 cm/año. El análisis de Varianza para el factor "zona de vida", calcula un  $p = 0.945$ , lo cual permite afirmar que, el crecimiento diamétrico de la especie, no es afectado por este factor y que se pueden tomar el total de los 27 datos para correr los tres modelos.

### Incremento corriente anual por clase diamétrica

La distribución por clases diamétricas para *A. excelsum*, se encuentra en la Tabla 4, donde la clase diamétrica cinco, presenta el mayor número de árboles, con ICA

de 1,06 cm/año. El mayor incremento, está en dos árboles que se encuentran en la clase diámetro seis, con un ICA promedio de 2,33 cm/año, mientras que el menor ICA promedio, se encuentra en la clase diámetro 11 con 0,32 cm/año. El ICA promedio por clase diámetro para los 27 árboles, es de 1,40 cm/año.

**Tabla 4.** Relación del incremento corriente anual promedio con la clase diámetro para la especie *Anacardium excelsum*, en bosques del Tolima.

	CLASE DIAMÉTRICA (cm)	MARCA DE CLASE (cm)	No. DE ÁRBOLES	ICA P (cm/ año)
1	10,0 ≤ 19,5	14,75	4	0,46
2	19,5 ≤ 29,0	24,25	1	2,32
3	29,0 ≤ 38,5	33,75	3	1,29
4	38,5 ≤ 48,0	43,25	1	2,10
5	48,0 ≤ 57,5	52,75	5	1,06
6	57,5 ≤ 67,0	62,25	2	2,33
7	67,0 ≤ 76,5	71,75	3	1,54
8	76,5 ≤ 86,0	81,25	4	1,41
9	86,0 ≤ 95,5	90,75	2	1,55
10	95,5 ≤ 105,0	100,25	1	0,98
11	105,0 ≤ 114,5	109,75	1	0,32
	<b>TOTAL</b>		<b>27</b>	
	<b>PROMEDIO</b>			<b>1,40</b>

ICA P: Incremento corriente anual promedio observado.

### Modelación de la tasa de crecimiento

Los modelos con sus respectivos parámetros usados para hallar la tasa de crecimiento de la especie *A. excelsum*, determinados por regresión no lineal, se presentan en la Tabla 5. La asíntota utilizada para esta especie es de 113 cm, debido a que este, es el diámetro máximo encontrado en las mediciones. El modelo que presentó el menor cuadrado medio del error (CME), fue el logístico, con 0,255.

El ICA corregido para *A. excelsum*, se calculó, al reemplazarse cada uno de los modelos con los respectivos parámetros. En la Tabla 6, se presenta el ICA corregido por clase diámetro. Al calcular el análisis de varianza para las medias de los ICA corregido por cada uno de los modelos, se presentó un valor de  $p = 0.987$ , lo cual permite concluir, que no existe una diferencia estadística significativa entre estos valores.



**Tabla 5.** Ecuaciones de tasas de crecimiento para la especie *Anacardium excelsum*, con sus parámetros y cuadrado medio del error (CME), en bosques del Tolima.

MODELO	dD/dt=	PARÁMETROS				CME
		A (cm)	n	m	k	
VON BERTALANFFY	$\eta(D^m - A^{(m-1)} D)$	113	105,481	0,999		0,360
LOGÍSTICO	kD (1-D/A)	113			0,068	0,255
GOMPERTZ	kD Ln A/D	113			0,046	0,324

**Tabla 5.** Incremento corriente anual promedio e incremento corriente anual corregido, por cada una las ecuaciones para la especie *Anacardium excelsum*, en bosques del Tolima.

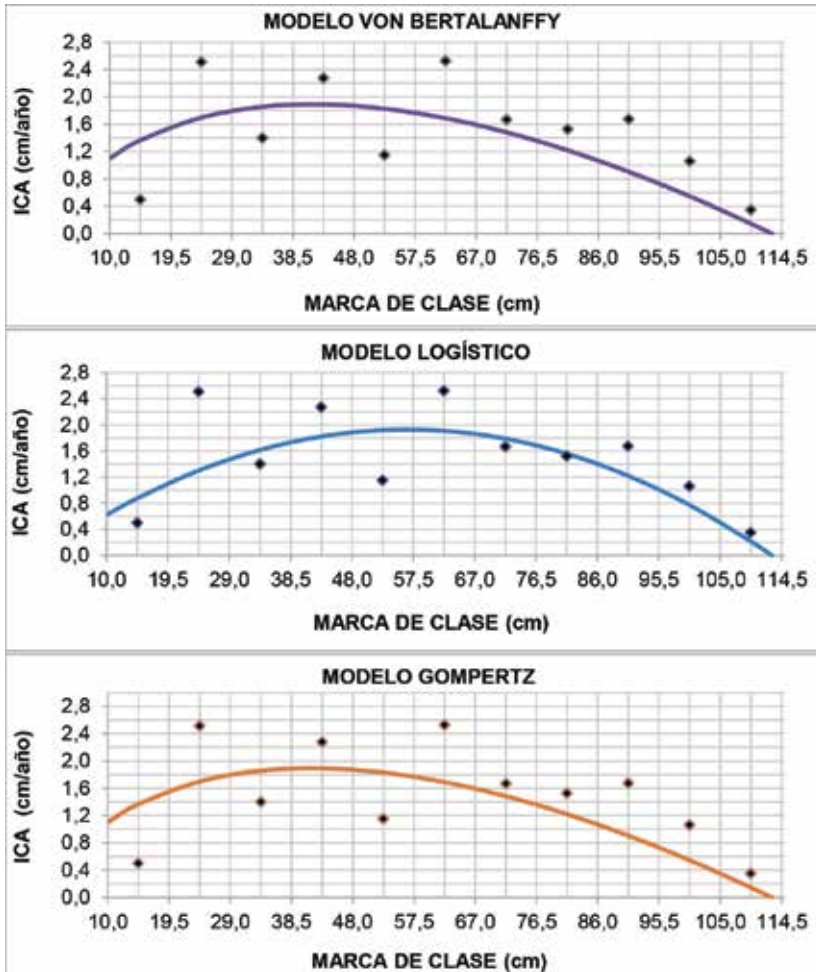
	CLASE DIÁMETRICA (cm)	MARCA DE CLASE (cm)	No. DE ÁRBOLES	ICA P (cm/año)	ICA 1 (cm/año)	ICA 2 (cm/año)	ICA 3 (cm/año)
1	10 ≤ 19,5	14,75	4	0,46	1,37	0,88	1,37
2	19,5 ≤ 29	24,25	1	2,32	1,70	1,30	1,70
3	29 ≤ 38,5	33,75	3	1,29	1,86	1,62	1,86
4	38,5 ≤ 48	43,25	1	2,10	1,89	1,82	1,89
5	48 ≤ 57,5	52,75	5	1,06	1,83	1,92	1,83
6	57,5 ≤ 67	62,25	2	2,33	1,69	1,91	1,69
7	67 ≤ 76,5	71,75	3	1,54	1,48	1,79	1,48
8	76,5 ≤ 86	81,25	4	1,41	1,22	1,56	1,22
9	86 ≤ 95,5	90,75	2	1,55	0,90	1,22	0,91
10	95,5 ≤ 105	100,25	1	0,98	0,55	0,77	0,55
11	105 ≤ 114,5	109,75	1	0,32	0,15	0,22	0,15
	<b>PROMEDIO</b>			<b>1,40</b>	<b>1,33</b>	<b>1,36</b>	<b>1,33</b>

ICA P: Incremento corriente anual promedio observado. ICA 1: Incremento corriente anual corregido por la Ecuación de Von Bertalanffy. ICA 2: Incremento corriente anual corregido por la Ecuación Logística. ICA 3: Incremento corriente anual corregido por la Ecuación Gompertz.

La tasa máxima de crecimiento de la especie alcanzada por el modelo de Von Bertalanffy y Gompertz, se encuentra en la clase diamétrica cuatro, mientras que la alcanzada con el modelo logístico, se ubica en la clase diamétrica cinco. El ICA promedio corregido por el modelo de Von Bertalanffy y de Gompertz, es

respectivamente, 5 % menor, que el ICA promedio observado, mientras que con el modelo logístico, esta diferencia es menor de 2,8%.

La representación gráfica de la tasa de crecimiento de *A. excelsum*, se presenta en la Figura 1. El comportamiento del modelo de Von Bertalanffy y el de Gompertz, es similar, debido a que se muestra una curva cóncava, que empieza a disminuir, desde la marca de clase 52,8cm, hasta alcanzar la asíntota, donde el incremento es cero; esta tendencia, se acerca a los valores del ICA observados en las últimas marcas de clase. En cuanto a la curva cóncava que representa el modelo logístico, se muestra que, es coincidente con muchos de los puntos del ICA observados y empieza a disminuir lentamente, desde la marca de clase 71,8 cm, hasta cuando llega a la asíntota, donde el crecimiento es cero.



**Figura 1.** Relación del incremento corriente anual promedio y el incremento corriente anual corregido, por cada uno de los modelos con la marca de la clase diamétrica para la especie *Anacardium excelsum*, en bosques del Tolima.

## Modelación del crecimiento

En la Tabla 7, se presentan los modelos con sus respectivas ecuaciones y parámetros. Con los parámetros de las ecuaciones de Von Bertalanffy, se determinó que, la media ponderada de tasa de crecimiento absoluto del *A. excelsum*, es de 1,28 cm/año, mientras que, la media ponderada de la tasa de crecimiento relativo, es de 4,54 % y el tiempo que requiere para que se efectuó la mayor parte del crecimiento, es de 87,94 años. Con los parámetros de los modelos Gompertz y logístico, se calculó, que el tiempo en el cual, se desacelera la curva de crecimiento es 19,46 y 34,15 años, respectivamente, mientras que, el punto de inflexión del diámetro, es de 41,57 y 56,5 cm, respectivamente.

**Tabla 7.** Ecuaciones de crecimiento para la especie *Anacardium excelsum* y sus parámetros en bosques del Tolima.

MODELO	D=	PARÁMETROS				
		A (cm)	D <sub>0</sub> (cm)	b	k	m
VON BERTALANFFY	$A(1 \pm b \exp(-kT))^{(1/(1-m))}$	113	10	0,001	0,045	0,999
LOGÍSTICO	$A/(1+b*\exp(-kt))$	113	10	10,300	0,068	
GOMPERTZ	$A*\exp(-b*\exp(-kT))$	113	10	2,425	0,046	

La tasa o velocidad con que llega *A. excelsum*, a la asíntota, está representada por el valor de k, que se observa en la Tabla 7. El valor más alto de esta tasa, es el estimado por el modelo logístico, con 0,068 cm/año, mientras que, para el modelo de Gompertz, es de 0,046 cm/año y la del modelo de Von Bertalanffy, es de 0,045 cm/año.

Las curvas de crecimiento de *A. excelsum*, se presentan en la Figura 2. Los modelos de Von Bertalanffy y de Gompertz, presentan un comportamiento similar, debido a que en los primeros 50 años, la especie llega a crecer más de 88 cm, después de este tiempo, el crecimiento disminuye y finalmente, llega a la asíntota, en aproximadamente, 180 años. La curva de crecimiento del modelo logístico, muestra que, en los primeros 50 años, la especie crece 84 cm, pero después, el crecimiento se incrementa y llega a la asíntota, en 140 años.

## Análisis de perfiles o comparación de las gráficas de tendencias de crecimiento

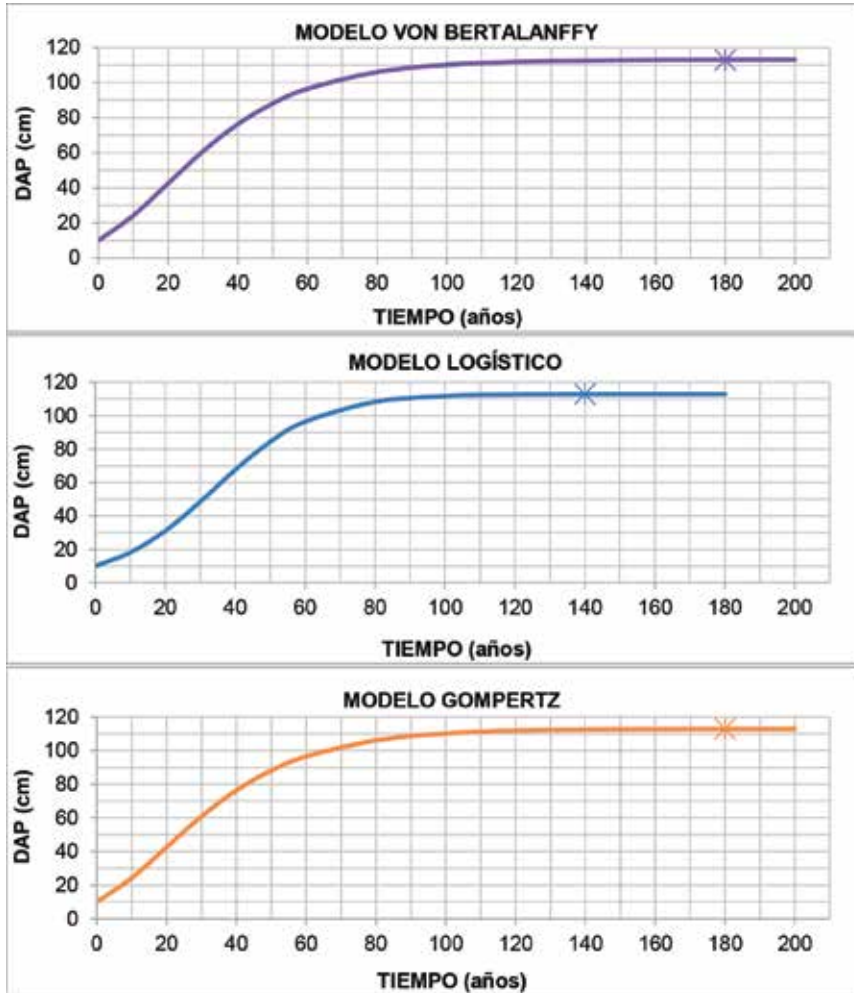
Al realizarse la comparación de los perfiles que se observan en la Figura 2, cuya hipótesis nula es: los perfiles de crecimiento diamétrico, con el paso de los años de *A. excelsum*, estimado por medio de modelos de crecimiento, son iguales. Se encontró que:

$$T^2 = 19*(C*m)'*inv(C*S*C')*(C*m) = 1,335.$$

$$T^2' = [(18-3+1)/(18-1)*(3-1)]*1,335 = 0.63.$$

$$\text{Para } \alpha=0,05, F(p-1, n-p+1), F_{(2, 16)} = 3,63.$$

Por lo tanto si se encuentra igualdad entre los perfiles y se acepta la hipótesis nula, debido a que,  $T^2 < F_{(2, 15)}$ .



**Figura 2.** Curvas de crecimiento para la especie *Anacardium excelsum*, correspondientes a cada uno de los modelos de crecimiento en bosques del Tolima.

## DISCUSIÓN

Se encontró una similitud entre las tasa de crecimiento de *A. excelsum*, representada por los modelos de Von Bertalanffy y de Gompertz, debido a que, según GONZÁLEZ (1994), cuando el valor del parámetro “m” de la ecuación de Von Bertalanffy, es aproximadamente, uno, se comporta como la curva de Gompertz.

Se estimó, por medio de los modelos no lineales, que *A. excelsum*, presenta un crecimiento diamétrico relativamente rápido, porque al compararlo con los crecimientos estimados por DEL VALLE (1997), para la misma zona de vida bh-T, el *A. excelsum*, presentó un crecimiento diamétrico 4, 6% menor, al de *Otoba gracilipes*, pero superior un 80,9 y 79,3% en comparación con el *Swartzia amplifolia* y *Pithecellobium latifolium*, respectivamente. Con base en lo anterior, esta especie, puede ser considerada para realizar ensayos con propósitos de reforestación protectora o comercial, además de ser utilizada para aprovechamientos forestales comerciales.

El análisis de varianza, mostró que, el crecimiento diamétrico de la especie *A. excelsum*, en tres zonas de vida del Tolima, no tienen diferencias estadísticas significativas, llevándonos a afirmar que, la distribución espacial natural de esta especie, es de amplio rango ambiental.

## CONCLUSIONES

*A. excelsum*, presentó una tasa de crecimiento diamétrico promedio de 1,40 cm/año, en los bosques naturales del departamento del Tolima.

Se encontró que, la especie *A. excelsum*, presentó un crecimiento diamétrico rápido, debido a que tarda entre 20 a 25 años de edad, para obtener un diámetro aprovechable de 40 cm. Si se toma como valor asintótico un diámetro de 113 cm, la especie puede tardar más de cien años para lograrlo.

No existe diferencia estadística significativa, entre los tres perfiles de crecimiento diamétrico de la especie. En consecuencia, los tres modelos pueden ser utilizados para estimar este crecimiento.

Este estudio es pionero en el departamento del Tolima, por lo que se constituye, en un referente para otras estimaciones del crecimiento diamétrico en especies nativas forestales.

## AGRADECIMIENTOS

A la Corporación Autónoma Regional del Tolima (CORTOLIMA); la Universidad del Tolima; Ingeniero Juan Diego Uribe Martínez; todas aquellas personas que contribuyeron a la realización de este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

- BLASCO, A., s. f.-*La descripción del crecimiento, informe técnico ocasional No. 6*. Departamento de ciencia animal. Universidad Politécnica de Valencia. España.
- BROWN, S., 1997.-*Estimating biomass and biomass change of tropical forests: A primer. forest resources assessment*. FAO Forestry Paper. Roma. 55 p.
- CAMPBELL, A. N. & REECE, B. J., 2007.- *Biología*. Ed. Médica Panamericana. 1532 p.
- CASAS, G., RODRÍGUEZ, D. & AFANADOR, G., 2010.- Propiedades matemáticas del modelo de Gompertz y su aplicación al crecimiento de los cerdos. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 23: 349-358.

- DEL VALLE, J.I., 1997.-Crecimiento de cuatro especies de los humedales forestales del litoral Pacífico colombiano. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):445-466.
- DÍAZ-MONROY, L.G., 2002.- *Estadística multivariada: inferencias y métodos*. 1ª edición. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Estadística. Panamericana Forma e Impresos S.A.
- DIÉGUEZ, A. U., BARRIO, M., CASTEDO, F., RUIZ, A. D., ALVAREZ, M. F., ALVAREZ, J. G. & ROJO, A., 2003.- *Dendrometría*. Ediciones Mundi-Prensa. Madrid. 327 p.
- ESPIÑA, L., 1984.- *El modelo logístico. Serie de estudios económicos, No. 23*. Departamento de informaciones estadísticas y publicaciones de Banco Central de Chile. Santiago de Chile. 38 p.
- GARCÍA, W., 2009.- Sistema de crecimiento y rendimiento para *Pinus patula* de Zacualtipán, Hidalgo, México: Tesis, Maestría en Ciencias Forestal, Colegio de Postgraduados, Montecillo, Texcoco, Estado de México. 78 p.
- GONZÁLEZ, H., 1994.- Generalización de un modelo determinístico para el análisis del crecimiento de organismos vivos. *Revista Facultad Nacional de Agronomía*, 47: 89-98.
- GUTIÉRREZ, R., 2005.- Difusiones estocásticas no homogéneas lognormales y gompertz. Proceso de rayleigh. Aplicaciones: Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Estadística. 173 p.
- HERNÁNDEZ, L. & CASTELLANOS, H., 2006.- Crecimiento diamétrico arbóreo en bosques de Sierra de Lema. *Guayana venezolana: primeras evaluaciones*, 31(11): 787-793.
- IMAÑA, J. & ENCINAS, O., 2008.- *Epidometría Forestal*. Universidad de Brasilia, Departamento de Engenharia Florestal. Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias Forestales. Brasilia, Mérida. 66 p.
- LEÓN-PELÁEZ, J.D. & GIRALDO, E., 2000.- Crecimiento diamétrico en robledales del norte y centro de Antioquia. *Crónica Forestal y del Medio Ambiente*, 15:119-138.
- LÓPEZ, A., 1993.- *Modelos Matemáticos para describir el crecimiento de un bosque primario en el Bajo Calima*. Universidad Javeriana. Cali.
- MELO, A. & VARGAS, R., 2003.- *Evaluación ecológica y silvicultural de ecosistemas boscosos*. Ibagué. 185 p.
- QUINÓNEZ, J. & LECOMPTE, A., 2007.- Modelos exponencial y logístico de la población en el suroeste de Puerto Rico. *Revista de investigación en ciencias matemáticas*, 1(3): 63-78.
- RAMÍREZ, H., ACEVEDO, M., ATAROFF, M. & TORRES, A., 2009.- Crecimiento diamétrico de especies arbóreas en un bosque estacional de los llanos occidentales de Venezuela. *Ecotrópicos Sociedad Venezolana de Ecología*, 22(2):46-63.
- RIANO, O., 2000.- Solución Completa de una ecuación diferencial utilizada para determinar crecimiento de árboles. *Colombia Forestal*, 6 (13): 119-124.
- UNIVERSIDAD DEL TOLIMA-CORTOLIMA. 2007.- *Plan General de Ordenación Forestal para el Departamento del Tolima: Informe técnico final, tomo I*. Ibagué. 269 p.
- UNIVERSIDAD DEL TOLIMA- CORTOLIMA., 2011.- *Proyecto: crecimiento de 20 especies forestales de alto valor comercial y ecosistémico de los bosques naturales del departamento del Tolima*. Ibagué. 88 p.
- VANCLAY, J., 1994.- *Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests*. CAB International. Oxford. 336 p.
- VÁSQUEZ, G., 1988.- *Crecimiento de un bosque de guandal explotado en el Pacífico colombiano*: Tesis, Ingeniería Forestal, Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 213 p.
- WINSOR C. P., 1932.- The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18 (1): 1-7.